Calcul littéral : Factorisation

Cours 3ème
A. HAGUET

Factoriser, c'est transformer une expression en un produit (multiplication)

I) Factoriser avec un facteur commun

On utilise la formule de simple développement, mais à l'envers :
Soient k, a et b 3 nombres : $ka + kb = k(a+b)$ ou $ka - kb = k(a-b)$
→ Il faut repérer un facteur commun (k) à chaque terme.

exemples : $3a + 3b = 3(a + b)$ → 3 est le facteur commun

$5a + 8a^2 = a \times 5 + a \times 8a$ → a est le facteur commun
$= a(5 + 8a)$

$15y + 10y^2 = 5y \times 3 + 5y \times 2y$ → 5y est le facteur commun
$= 5y(3 + 2y)$

$16x^2 - 12xy = 4x \times 4x - 4x \times 3y$ → 4x est le facteur commun
$= 4x(4x - 3y)$

$2x(4x + 3) - (4x + 3)(x + 2) = 2x(4x + 3) - (4x + 3)(x + 2)$ → (4x + 3) est le facteur commun
$= (4x + 3)[2x - (x + 2)]$
$= (4x + 3)(x - 2)$

II) Factoriser sans facteur commun

Quand il n'y a pas de facteur commun, on peut essayer de repérer une formule (identité remarquable)

développement →
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
← Factorisation

preuve : $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$
$= a^2 - b^2$

→ Pour la cette formule il faut repérer une différence de 2 carrés : $a^2 - b^2$

exemples : Factoriser $25x^2 - 9$ → cela ressemble à $a^2 - b^2$
$25x^2 - 9 = (5x)^2 - (3)^2$ → on a trouvé le a et le b : $a = 5x$ $b = 3$
$25x^2 - 9 = (5x + 3)(5x - 3)$ → on a bien $a^2 - b^2$

Factoriser $81x^2 - 4$ → cela ressemble à $a^2 - b^2$
$81x^2 - 4 = (9x)^2 - (2)^2$ → on a trouvé le a et le b : $a = 5x$ $b = 3$
$81x^2 - 4 = (9x + 2)(9x - 2)$ → on a bien $a^2 - b^2$

exemples : Factoriser $(4x + 3)^2 - 25x^2$ → cela ressemble à $a^2 - b^2$
$(4x + 3)^2 - 25x^2 = (4x + 3)^2 - (5x)^2$ → on a trouvé le a et le b : $a = (4x + 3)$ $b = 5x$
$(4x + 3)^2 - 25x^2 = (4x + 3 + 5x)(4x + 3 - 5x)$
$(4x + 3)^2 - 25x^2 = (9x + 3)(-x + 3)$

Remarque : cette formule peut être utilisée pour développer certaines expressions :

$C = (6x + 7)(6x - 7)$ → on reconnaît la formule $(a + b)(a - b)$ avec $a = 6x$ et $b = 7$
$C = (6x)^2 - (7)^2$ → $a^2 - b^2$
$C = 36x^2 - 49$

III) Application à la résolution d'équations

Exemple 1: Résoudre l'équation $4x^2 - 18x = 0$ ← il faut factoriser pour la transformer en équation produit

$2x(2x - 9) = 0$

Soit $2x = 0$ ou soit $2x - 9 = 0$

$2x : 2 = 0:2$ $\quad$ $2x - 9 + 9 = 0 + 9$

$x = 0$ $\quad$ $2x = 9$

$2x:2 = 9:2$

$x = 4,5$

les 2 solutions de l'équation sont $x = 0$ et $x = 4,5$

Exemple 2: l'équation $(x + 3)^2 = 25$

1ère méthode : On se ramène à une équation produit

$(x + 3)^2 = 25$

$(x + 3)^2 - 25 = 25 - 25$

$(x + 3)^2 - 25 = 0$ ← on a une différence de 2 carrés donc on peut factoriser avec $a^2 - b^2$

$(x + 3)^2 - (5)^2 = 0$

$(x+3 - 5)(x+3 + 5) = 0$

$(x - 2)(x + 8) = 0$

Soit $x - 2 = 0$ ou soit $x + 8 = 0$

$x - 2 + 2 = 0 + 2$ ou soit $x + 8 - 8 = 0 - 8$

$x = 2$ ou $x = -8$

les 2 solutions de l'équation sont $x = 2$ et $x = -8$

2ème méthode : On utilise l'équation carré

$(x + 3)^2 = 25$

$x + 3 = \sqrt{25}$ ou $x + 3 = -\sqrt{25}$

$x + 3 = 5$ ou $x + 3 = -5$

$x + 3 - 3 = 5 - 3$ ou $x + 3 - 3 = -5 - 3$

$x = 2$ ou $x = -8$

les 2 solutions de l'équation sont $x = 2$ et $x = -8$