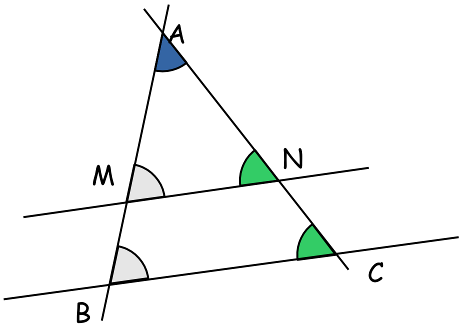
Le théorème de Thales et sa réciproque

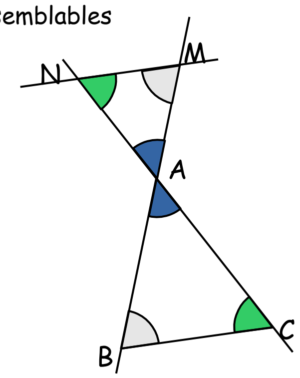
I) Le théorème de Thales

a) Les 2 configurations de THALES

2 droites sécantes coupées par 2 droites parallèles forment 2 triangles semblables

et sont correspondants égaux





et sont alternes-internes égaux

sont opposés par le sommet donc égaux

Dans les 2 cas les triangles ABC et AMN ont leurs angles 2 à 2 égaux donc ils sont semblables
<u>Conclusion :</u> Leurs longueurs sont proportionnelles

triangle ABC	AB	AC	BC
triangle AMN	AM	AN	MN

<u>on a donc :</u>

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC} = \text{(coefficient de reproduction)}$$

b) Résumé

<u>Conclusion (th. de THALES) :</u>

Dans les triangles ABC et AMN

Si A,N,C et A,M,B sont alignés
(MN) // (BC)
alors $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

II) Exemples

a) Exemple 1

Soit ABC un triangle tel que : AB = 5 cm AC = 4 cm BC = 6 cm
I et J 2 points tels que : I $\in$ [AB) et AI = 8 cm
J $\in$ [AC) et (IJ) // (BC)

<u>Calculer AJ et IJ</u>
Dans les triangles ABC et AIJ

<u>on sait que :</u> A,B,I et A,C,J sont alignés
(IJ) // (BC)

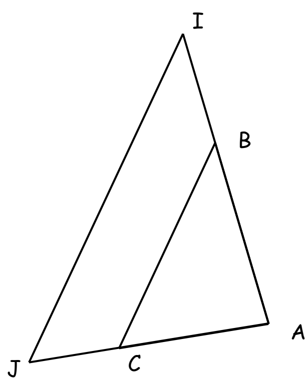
<u>Donc:</u> d'après le théorème de Thales,

on a : $\frac{AB}{AI}=\frac{AC}{AJ}=\frac{BC}{IJ}$

$\frac{5}{8}=\frac{4}{AJ}=\frac{6}{IJ}$

$\frac{5}{8}=\frac{4}{AJ}$ et $\frac{5}{8}=\frac{6}{IJ}$

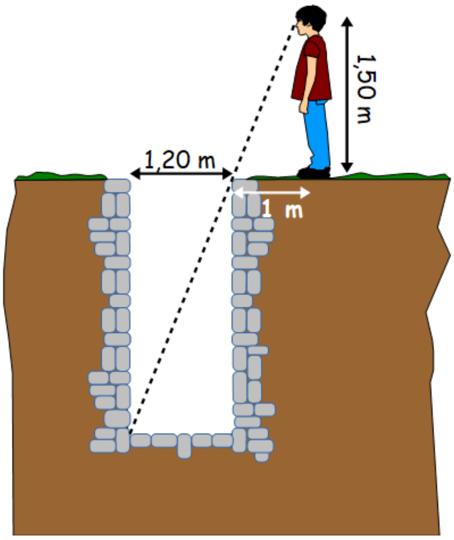
AJ = $\frac{8\times 4}{5}$ = 6,4 et IJ = $\frac{6\times 8}{5}$ = 9,6



b) Exemple 2

Le puits
Voici une technique décrite dans un ouvrage d'Euclide (300 ans avant JC) pour mesurer la profondeur d'un puits :
En plaçant son œil à 1,50 m de hauteur et à 1 m du bord d'un puits de 1,20 m de diamètre, le bord du puits cache juste la ligne du fond.

extrait du livre Mission indigo 3ème



Quelle est la profondeur de ce puits ?

Dans ABC et ADE
<u>On sait que :</u> B, A, D et C, A, E alignés
(BC) // (DE)

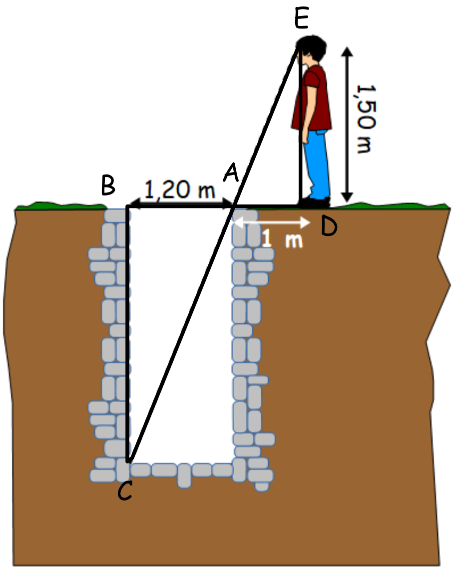
<u>Donc :</u> D'après le théorème de Thales on a :

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{ED}{BC}$$

$$\frac{1}{1,20}=\frac{AE}{AC}=\frac{1,50}{BC}$$

$$\frac{1}{1,20}=\frac{1,50}{BC}$$

produit en croix
1 x BC = 1,50 x 1,20
BC = 1,80 m



II) La réciproque du théorème de Thales

Soit ABC un triangle

<u>Si on sait que :</u> A, I, B et A, I, C sont alignés **dans le même ordre**

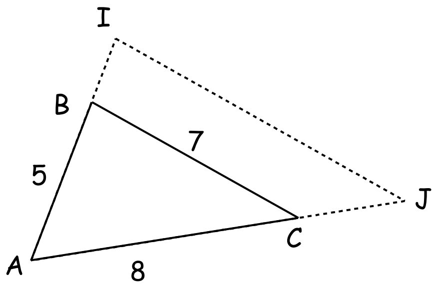
et que : $\frac{AI}{AB}=\frac{AJ}{AC}$ ***(à prouver)***

<u>Alors on peut conclure que</u> les droites (IJ) et (BC) sont parallèles

a) Exemple 1

Soit ABC un triangle tel que :
AB = 5 cm AC = 8 cm BC = 7 cm
I $\in$ [AB) tel que AI = 7 cm
J $\in$ [AC) tel que AJ = 11,2 cm

Les droites (IJ) et (BC) sont-elles parallèles ?



Dans le triangle ABC

<u>On sait que :</u> $I \in (AB)$
$J \in (AC)$

A, I, B et A, J, C ont une position analogue

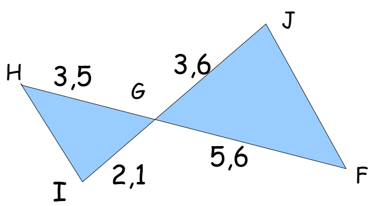
$$\underbrace{\frac{AI}{AB} = \frac{7}{5} = 1{,}4 \quad \vdots \quad \frac{AJ}{AC} = \frac{11{,}2}{8} = 1{,}4}$$

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$$

<u>Donc</u>, d'après la réciproque du théorème de Thales,
Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

<u>Remarque :</u> si après les calculs on trouve 2 quotient différents, alors le théorème de Thales permet de conclure que les droites ne sont pas parallèles.
En effet si les droites étaient parallèles alors d'après Thales les quotients seraient égaux et ce n'est pas le cas.

b) Exemple 2



Dans le triangle ABC

<u>On sait que :</u> $H \in (GF)$
$I \in (GJ)$
H,G,F et I, G, J sont alignés dans le même ordre

$$\underbrace{\frac{GH}{GF} = \frac{3{,}5}{5{,}6} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8} \quad \vdots \quad \frac{GI}{GJ} = \frac{2{,}1}{3{,}6} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}}$$

$$\frac{GH}{GF} \neq \frac{GI}{GJ}$$

<u>Donc</u>, Les droites (HI) et (JF) ne sont pas parallèles.