Nombres premiers

cours

Dans ce chapitre, les nombres rencontrés seront **toujours des nombres entiers**

I) Un peu de vocabulaire :

Un nombre est **multiple** d'un autre quand il est dans sa table de multiplication
Un nombre est un **diviseur** d'un autre quand le reste de la division euclidienne est 0

Si on a la relation **a × b = c**

Le nombre **c** est **un multiple** des nombres a et b
→ il est dans la table de a et b

Les nombres **a et b** sont des **diviseurs** du nombre c
→ car c: a = b et c:b = a (reste 0)

exemple : **5 x 4 = 20**

Le nombre **20** est **un multiple** des nombres 5 et 4
→ il est dans la table de 5 et 4

Les nombres **5 et 4** sont des **diviseurs** du nombre 20
→ car 20: 5 = 4 et 20:4 = 5 (reste 0)

tu peux t'aider de cette vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=sSgsrHMyFrI&feature=youtu.be

Exercice 1 :

Entourez les multiples de 5 : 423 - 555 - 230 - 49 - 35 ils se terminent par 0 ou 5
Entourez les multiples de 2 : 41 - 52 - 1034 - 657 - 1000 ils sont pairs
Entourez les multiples de 3 : 57 - 103 - 87 - 292 - 603 la somme des chiffres est dans la table de 3
ex : 87 → 8+7=15 et 15 est dans la table de 3

Entourez les nombres divisibles par 10 (dont 10 est un diviseur) : 540 - 20000 - 601 - 70 ils se terminent par 0
Entourez les nombres divisibles par 9 (dont 9 est un diviseur): 645 - 12345 - 4446 - 299
la somme des chiffres est dans la table de 9
ex : 4446 → 4+4+4+6=18 et 18 est dans la table de 9

cours : Complétez les critères de divisibilité

Un nombre entier est divisible par	**2**	Quand il est pair (il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8)
	3	Quand la somme de ses chiffres est dans la table de 3 ex : 57 → 5 + 7 = 12 et 12 est dans la table de 3
	5	Quand il se termine par 0 ou 5
	9	Quand la somme de ses chiffres est dans la table de 9 ex : 182745 → 1+8+2+7+4+5 = 27 et 27 est dans la table de 9
	10	Quand il se termine par 0

Exercice 2 :

a) Déterminez les 5 plus petits multiples de 12 : 12 - 24 - 36 - 48 - 60
Déterminez tous les diviseurs de 12 : 1 - 12 - 2 - 6 - 3 - 4 (les produits qui font 12 sont : 1x12 2x6 3x4)

b) Déterminez les 5 plus petits multiples de 45 : 45 - 90 - 135 - 180 - 225
Déterminez tous les diviseurs de 45 : 1 - 45 - 3 - 15 - 5 - 9 (les produits qui font 45 sont : 1x45 3x15 5x9)

II) Nombres premiers

<u>Exercice3 :</u> Déterminez **<u>tous les</u>** diviseurs des nombres suivants :

21 : 1 - 21 - 3 - 7 (les produits qui font 21 sont : 1x21 3x7)

19 : 1 - 19 (les produits qui font 19 sont : 1x19)

20 : 1 - 20 - 2 - 10 - 4 - 5

27 : 1 - 27 - 3 - 9

31 : 1 - 31

Un **nombre premier** est un <u>nombre entier positif</u> qui n'a **exactement que 2 diviseurs : 1 et lui même**.

0 n'est pas un nombre premier → il a une infinité de diviseurs (tous les nombres divisent 0)
1 n'est pas un nombre premier → il n'a qu'un seul diviseur : 1
le plus petit nombre premier est 2 → les diviseurs de 2 sont : 1 et 2

2 est le seul nombre premier qui est pair (normal car les autres nombres pairs ont au moins 3 diviseurs : 1 - eux mêmes - 2)

Parmi les 5 nombres de l'exercice 3, ceux qui sont des nombres premiers sont : 19 et 31

Il n'existe pas de formule « magique » pour trouver des nombres premiers, c'est pour cela que ces nombres sont très importants en mathématiques et comportent encore beaucoup de secrets.
Ils servent notamment de base à la cryptologie.

Voici une petite méthode pour trouver tous les nombres premiers entre 0 et 100 : **Le crible D'Eratosthène**
(ex 37 p 47)

~~0~~	~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29
~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~
~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~
~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59
~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~
~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79
~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89
~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~

III) Décomposition en produit de facteurs premiers

un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose d'une façon unique en produit de facteurs premiers
(aide : https://www.youtube.com/watch?v=RBE2wPIKagI&feature=youtu.be)

Ex : $50 = 2 \times 25 = 2 \times 5 \times 5 = 2 \times 5^2$
→ la décomposition en produit de facteurs premiers de 50 est : 2×5^2

$84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$
→ la décomposition en produit de facteurs premiers de 84 est : $2^2 \times 3 \times 7$

$2700 = 27 \times 100 = 3^3 \times 10 \times 10 = 3^3 \times 2^2 \times 5^2$
→ la décomposition en produit de facteurs premiers de 2700 est : $3^3 \times 2^2 \times 5^2$

A vous :

$36 = 4 \times 9 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$

$2500 = 25 \times 100 = 5 \times 5 \times 10 \times 10 = 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 = 2^2 \times 5^4$

IV) Fractions irréductibles

Une fraction est irréductible quand elle ne peut plus être simplifiée, autrement dit le seul diviseur commun du numérateur et du dénominateur est 1

Méthode : Pour rendre irréductible une fraction, on décompose le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers et on simplifie le facteurs identiques
(aide : https://www.youtube.com/watch?v=qZaTliAWkA0&feature=youtu.be)

Exemples :

1/ Simplifier : $\frac{84}{2700}$ (on peut bien-sur procédé comme habituellement)

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $2700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$ (voir exemples du II)

$$\frac{84}{2700} = \frac{2^2\times3\times7}{2^2\times3^3\times5^2} = \frac{(2^2\times3)\times7}{(2^2\times3)\times3^2\times5^2}$$

j'ai mis entre parenthèse ce qui est commun au num. et au dénom.

$$\frac{84}{2700} = \frac{7}{3^2\times5^2} = \frac{7}{9\times25} = \frac{7}{225}$$

2/ Simplifier : $\frac{28}{264}$

28 : $4 \times 7 = 2 \times 2 \times 7 = 2^2 \times 7$ (décomposition en produit de facteurs premiers)

264: $2 \times 132 = 2 \times 2 \times 66 = 2 \times 2 \times 6 \times 11$ (décomposition en produit de facteurs premiers)
$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 11 = 2^3 \times 3 \times 11$

$$\frac{28}{264} = \frac{2^2\times7}{2^3\times3\times11} = \frac{(2^2)\times7}{(2^2)\times2\times3\times11} = \frac{7}{2\times3\times11} = \frac{7}{66}$$